Домашни решенија

**Графови**

Задача 1. Сите страни и дијагонали на еден правилен шестаголник се обоени со црвена или сина боја. Покажи дека има триаголник на кој сите страни му се обоени со иста боја!

Решение: Се сведува на задача 3. Едната боја претставува познанство, а втората непознанство.

Задача 2. Сите страни и дијагонали на еден правилен 17-аголник се обоени со црвена, зелена или сина боја. Покажи дека има триаголник на кој сите страни му се обоени со иста боја!

Решение: Да фиксираме едно теме. Тоа е поврзано со 16 темиња со некоја од трите бои. Од принцип на Дирихле, ако боите се кутии, а врските објекти, барем 6 од нив се со иста боја. Ако во тие 6 има барем две кои се поврзани со истата боја, тогаш го имаме бараниот триаголник. Во спротивно, тие меѓусебе се поврзани со останатите 2 бои и од претходната задача следува дека постои триаголник од иста боја.

Задача 3. На забавата се појавиле по 5 ученици од 3 различни училишта. Секој од нив знае по 6 ученици од другите две одделенија. Докажете дека е можно да се најде по еден ученик од секое од училиштата така што тројцата ученици се познаваат меѓусебно.

Решение: Нека училиштата се А, В и С. Прво, да увидиме дека од принципот на Дирихле, секој има барем по еден познаник од секое од останатите училишта.

Да го земеме ученикот кој има најмногу познаници од некој од другите училишта. Нека тој има k познаници. Тоа значи дека секој од останатите има најмногу k познаници од некој од другите училишта, и останатите 6 – k се од другото училиште. Не губиме од општост дека овој ученик е од училиштето А, дека k познаници има од В, а 6 – k од С. Земаме еден негов познаник од C. Тој мора да има барем 6 – k познаника од В. Тие заедно имаат барем 6 познаника од С, што значи дека барем еден им е заеднички. Тоа е бараната тројка.

**Геометрија**

Задача 1. Покажи дека во триаголник со страна 2 см не можат да се стават 5 точки такви што растојанието меѓу било кои две од нив биде поголемо од 1 см!

Решение: Го делиме триаголникот на 4 триаголници со страна 1. Од Принцип на дирихле барем две точки се во ист триаголник и тие се на растојание помало или еднакво на 1.

Задача 2. (Србија, државен натпревар, 2021, седмо одделение) Најди го најмалиот природен број n, таков што за секое множество од n точки со целобројни координати, од кои никои три не лежат на иста права, постои триаголник со врвови во тоа множество за кој важи дека средините на неговите страни повторно имаат целобројни координати.

Решение: n=5. Од 5 точки, барем 3 имаат прва координата со иста парност, па средината на таа координата е цел број. Од тие 3, барем 2 имаат втора координата со иста парност, па средната вредност на тие две координати е повторно цел број. За 4 точки не важи, на пример (0, 0), (1, 0), (0, 1) и (1, 1).

Задача 3. На бела рамнина е испрскана црна боја. Покажи дека постои рамностран триаголник чии темиња се во иста боја.

Решение: Избираме една точка, О, и цртаме кружница со радиус 1. На неа бираме произволна точка и со истиот лак како радиусот обележуваме уште 5 точки, за да се добие правилен 6-аголник со страна еднаква на радиусот. Нека точките ги обележиме со броевите од 1 до 6 во насока на движење на стрелките на часовникот. Од принцип на дирихле, барем 3 точки се со иста боја. Ако тие три имаат иста боја како О, тогаш ако постојат две кои се една до друга, заедно со О го прават триаголникот. Во спротивно, ако се обележани со броеви со иста парност, тие прават рамнокрак триаголник. Затоа нека најмногу 2 точки се иста боја со О. Ако нема две такви точки, тогаш од 5-те точки од друга боја, барем 3 се обележани со броеви со иста парност, па тие прават рамностран триаголник. Значи мора да има точно две точки со боја иста како О и тие точки не смеат да се преку една, затоа што во таков случај точките кои се соседни на овие две точки прават рамностран триаголник од другата боја. Значи мора тие две точки, заедно со О да лежат на иста права. Не губиме од општост ако речеме дека се обележани со 1 и 4. Ги повлекуваме правите низ 1 и 2 и правата низ 3 и 4. Нека тие се сечат во точката А. Ако А е во иста боја со О, тогаш 1, 4 и а прават рамностран триаголник. Во спротивно, 2, 3 и а прават рамностран триаголник.

Задача 4. Покажи дека на округла маса со радиус 20 не можат да се сместат повеќе од 400 округли парички со радиус 1.

Решение: Плоштината на повеќе од 400 парички е стриктно поголема од 400π, а на големата кружница е точно 400π, па јасно е дека ова не е можно.